

EUROPA-UNIVERSITÄT VIADRINA



FRANKFURT (ODER)

# **CUSUM, EMWA und andere "Kontrollkarten" – Favoriten und Irrtümer**

Sven Knoth

LS für Statistik, Europa-Universität Viadrina

knoth@euv-frankfurt-o.de

**Pfingsttagung der Deutschen Statistischen Gesellschaft in Jena**

24. Mai 2002

## Ausblick

1. Einführung
2. Verbindungen zwischen worst-case- und Durchschnittsszenarios
3. Roberts' ARL-Studie
4. EWMA gleicht CUSUM für kleine  $\lambda$

# 1. Einführung

## Change-point-Modell

Folge  $X_1, X_2, \dots$  mit VF  $\{F_{\theta_{(i)}}\}_{i=1,2,\dots}$  und unbekanntem  $m = \text{change point}$ , wobei

$$\theta_{(i)} = \begin{cases} \theta_0 & , i < m \\ \theta_1 & , i \geq m \end{cases}.$$

**Kontrollkarte** = Detektions-, Monitoring- oder Überwachungsverfahren

- Transformation  $\{X_i\}_{i=1,2,\dots,n} \rightarrow Z_n$  und
- Stoppzeit  $L = \inf \{n \in \mathbb{N} : Z_n \notin \mathcal{O}\}$ ,  $\mathcal{O} = (-\infty, ucl], [lcl, ucl]$ , or  $[lcl, \infty)$ .

## Standardmodell

- unabhängige  $\{X_i\}$ ,
- Normalverteilung, d. h.  $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_{(i)}, \sigma^2 = 1)$ ,
- $$\mu_{(i)} = \begin{cases} \mu_0 = 0 & , i < m \\ \mu_1 & , i \geq m \end{cases} ,$$
- $i < m$  – unter Kontrolle,  $i \geq m$  – außer Kontrolle
- $E_m(\cdot)$  – Erwartungswert für change point bei  $m$
- Average Run Length –  $ARL = E_\infty(L)$  bzw.  $ARL = E_1(L)$   
 $\rightsquigarrow$  bezeichne  $ARL$  mit  $\mathcal{L}_\mu$

## Einseitige Verfahren

- CUSUM – Page (1954)

$$Z_n = \max \{0, Z_{n-1} + X_n - k\}, \quad Z_0 = z_0,$$

$$L = \inf \{n \in \mathbb{N} : Z_n > h\} \quad (k = (\mu_0 + \mu_1)/2)$$

- EWMA – Roberts (1959) (reflektierende Grenze – Waldmann (1986), Gan (1993))

$$Z_n = \max \{z_{\text{reflect}}^*, (1 - \lambda) Z_{n-1} + \lambda X_n\}, \quad Z_0 = z_0,$$

$$L = \inf \left\{ n \in \mathbb{N} : Z_n > c \sqrt{\lambda/(2 - \lambda)} \right\}, \quad z_{\text{reflect}}^* = z_r \sqrt{\lambda/(2 - \lambda)}$$

- GRSS – Girshick/Rubin (1952), Širjajev (1963/76), Roberts (1966)

$$Z_n = (1 + Z_{n-1}) \exp(X_n - k), \quad Z_0 = z_0,$$

$$L = \inf \{n \in \mathbb{N} : Z_n > g\} \quad (\exp[(\mu_1 - \mu_0)(X_n - (\mu_0 + \mu_1)/2)])$$

## Zweiseitige Verfahren

- CUSUM: Kopplung von einseitigen Verfahren
- Crosier-CUSUM (1986)

$$Z_n = \begin{cases} 0 & , C_n \leq k \\ (Z_{n-1} + X_n) \cdot \left(1 - \frac{k}{C_n}\right) & , C_n > k \end{cases}, \quad C_n \stackrel{n \geq 1}{=} |Z_{n-1} + X_n|,$$

$$L = \inf \{n \in \mathbb{N} : |Z_n| > h\}$$

- EWMA – Roberts (1959)

$$Z_n = (1 - \lambda) Z_{n-1} + \lambda X_n, \quad Z_0 = z_0, \quad L = \inf \left\{ n \in \mathbb{N} : |Z_n| > c \sqrt{\lambda/(2 - \lambda)} \right\}$$

- GRSR: Pollak/Siegmund (1985) –  $Z_n = (Z_n^+ + Z_n^-)/2$   
 agiert wie Kopplung zweier 1seitiger Verf.  $Z_n = \max\{Z_n^+, Z_n^-\} \rightsquigarrow$  Kopplung  
 (PS:  $\mathcal{L}_1 = 11.142$ ,  $E(D_*) = 9.644$ , Kopplung:  $\mathcal{L}_1 = 11.142$ ,  $E(D_*) = 9.630$ , beide:  $\mathcal{L}_0 = 500$ )

## Aussagen über Leistungsfähigkeit

- Lorden (1971), Moustakides (1986), Ritov (1990): CUSUM ist optimal
- Pollak (1987): GRSR ist asymptotisch optimal
- Lucas/Saccucci (1990): *Our comparisons showed that the ARL's for the EWMA are usually smaller than the ARL's of CUSUM up to a value of the shift near the one that the scheme was designed to detect.*
- verschiedene Autoren: praktisch besteht kein Unterschied ...

## 2. Worst-case- und Durchschnittsszenarios

Verfahren mit Markoveigenschaft

$$\mathcal{F}_{m-1} = \sigma(X_1, \dots, X_{m-1}), \quad \mathcal{F}_{m-1}^* = \sigma(\mathcal{F}_{m-1} \cap \{L > m - 1\}),$$

$$D_*^{(m)} = E_m(L - m + 1 | \mathcal{F}_{m-1}^*) = \mathcal{L}_{\mu_1}(Z_{m-1}), \quad Z_{m-1} \sim f_{m-1}^*(\cdot)$$

$$E_m([L - m + 1]^+ | \mathcal{F}_{m-1}) = D_*^{(m)} \cdot I_{\{L > m-1\}} + 0 \cdot I_{\{L \leq m-1\}},$$

$$\mathcal{D}_{\text{Lorden}} = \sup_{m \geq 1} \text{ess sup} (D_*^{(m)}), \quad \mathcal{D}_{\text{Pollak/Siegmund}} = \sup_{m \geq 1} E(D_*^{(m)}),$$

$$D_* = \lim_{m \rightarrow \infty} D_*^{(m)}, \quad D_*^{(m)} \approx D_* \text{ für } m \geq m_* \text{ (klein)}$$

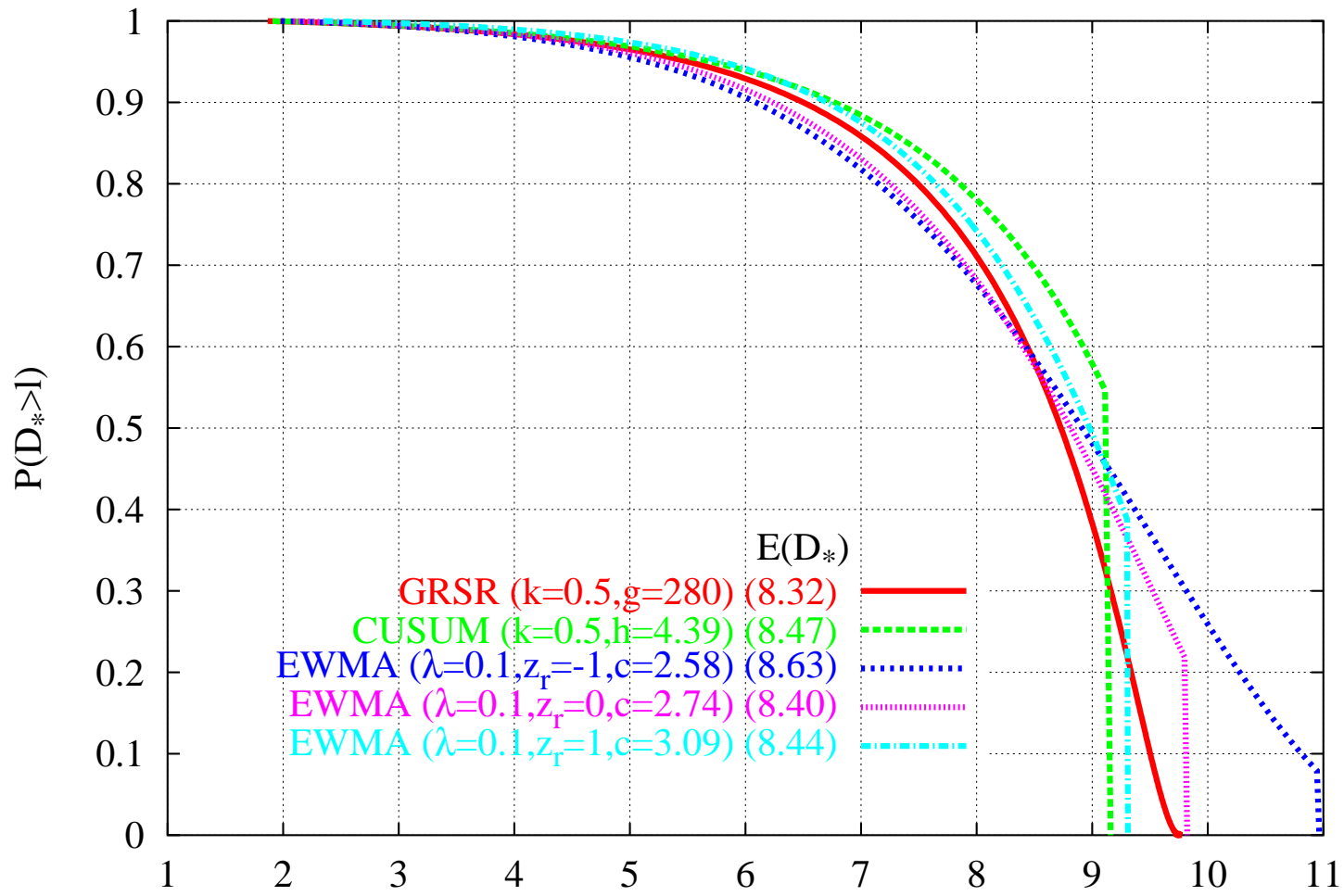
$$E(D_*) = \int_{\mathcal{O}} \psi_{\mu_0}(z) \mathcal{L}_{\mu_1}(z) d\mathcal{M}(z),$$

$$\text{wobei } \psi_{\mu_0}(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_{m-1}^*(z) \quad \text{mit} \quad f_{m-1}^*(z) := \frac{f_{m-1}(z)}{\int_{\mathcal{O}} f_{m-1}(z) d\mathcal{M}(z)}$$



# Einseitige Verfahren – Überlebensfunktion $P(D_* > l)$

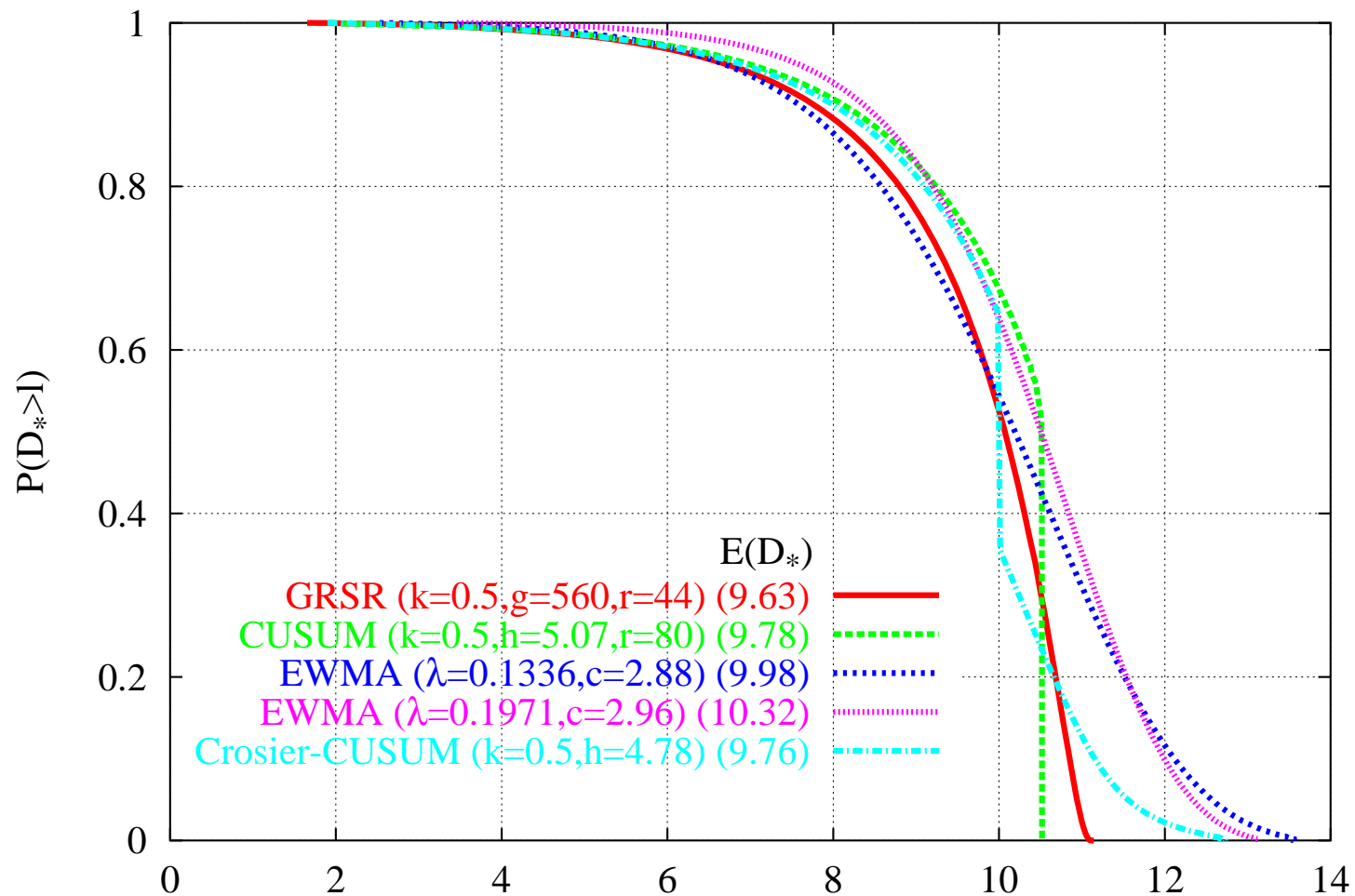
$$E_\infty(L) = 500, \mu_1 = 1$$



ess sup  $(D_*)$  : GRSR – 9.78, CUSUM – 9.16, EWMA<sub>-1</sub> – 10.96 (9.13), EWMA<sub>0</sub> – 9.82, EWMA<sub>1</sub> – 9.31

## Zweiseitige Verfahren – Überlebensfunktion $P(D_* > l)$

$$E_\infty(L) = 500, \mu_1 = 1$$



ess sup ( $D_*$ ) : GRSR – 11.14, CUSUM – 10.52, EWMA<sub>1</sub> – 13.54 (10.19), EWMA<sub>2</sub> – 13.14 (10.52), Crosier – 12.73 (10.01)

### 3. Roberts verglich diverse Kontrollkarten mittels des ARL-Kriteriums

(einseitige Verfahren)

Karte/Verfahren	Design ( $\mathcal{L}_0 = 740$ )	Kriterium	Berechnungsmethode
Shewhart	$c = 3$	$\mathcal{L}_\mu = E(D_*)$	exakt ( $\mathcal{L}_0 = 741.43$ )
MA	$n = 8, c = 2.79$	$E(D_*^{(9)})$	Monte Carlo, 25 000 Wdh.
EWMA (GMA)	$\lambda = 0.25, c = 2.87$	$E(D_*^{(9)})$	Monte Carlo, 25 000 Wdh.
CUSUM	$k = 0.47, h = 5$	$\mathcal{L}_\mu$	"translation" der 2seitigen Resultate von Ewan/Kemp (1960)
GRSR	$k = 0.5, g = 390$	$E(D_*^{(9)})$	Monte Carlo, 50 000 Wdh.

## Bemerkungen von Roberts

- **CUSUM:** *These curves all assume  $T = 0$ , and are upper bounds for those for  $T = 8$ , say, though the differences are small except for  $C_{26.8}(0)$ , ...*

$$(T = m - 1; C_{26.8}(0) - h = 26.8, k = 0)$$

- **MA/EWMA:** *By allowing the shifts to occur after eight observations with  $\mu_i = \mu_0$  (i. e.,  $T = 8$ ), complications due to changing limits were averted.*

$$(\text{EWMA: } \sqrt{\text{Var}(Z_9)/[\lambda/(2 - \lambda)]} = \sqrt{1 - (1 - \lambda)^{2 \cdot 9}} \underset{\lambda=0.25}{=} 0.997 \approx 1)$$

## Roberts – Originalresultate und aktuelle Ergebnisse

Verf.	$\Delta$								
	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	
$n = 8$	740	40	10.2	6.0	4.6	3.8	3.3	2.9	Roberts
MA	737	39	10.0	5.8	4.4	3.7	3.1	2.8	$E(D_*^{(9)})/E(D_*)$
$c = 2.79$	736	39	8.9	4.2	2.6	1.9	1.5	1.2	$E_1(L)$
$\lambda = 0.25$	740	40	10.1	5.1	3.5	2.7	2.2	1.9	Roberts
EWMA	686	39	9.8	5.0	3.4	2.6	2.1	1.8	$E(D_*^{(9)})/E(D_*)$
$c = 2.87$	681/689	37/39	8.4/10.0	3.9/5.1	2.5/3.4	1.9/2.6	1.5/2.2	1.3/1.9	$E_1(L)$
$k = 0.47$	740	34	10.0	5.8	4.3	3.5	2.9	2.5	Roberts
CUSUM	(719)/718	32	9.2/9.1	5.1	3.6	2.8	2.4/2.3	2.0	$E(D_*^{(9)})/E(D_*)$
$h = 5$	724	34	9.9	5.6	3.9	3.1	2.5	2.2	$E_1(L)$
$k = 0.5$	740	32	9.2	5.2	3.7	2.9	2.4	2.1	Roberts
GRSR	(690)/689	30	9.1/8.9	5.2/5.1	3.7/3.6	2.9/2.8	2.4	2.1	$E(D_*^{(9)})/E(D_*)$
$g = 390$	697	33	10.4	6.1	4.4	3.5	2.9	2.5	$E_1(L)$

## 4. EWMA gleicht CUSUM für kleine $\lambda$

### SAS Online-Manual (SAS 8.0, February 2000)

EWMAARL( $\delta, r, k$ )

*$r$  is the weight factor for the current subgroup mean in the EWMA, where  $0 < r \leq 1$ . If  $r = 1$ , the EWMAARL function returns the average run length for a Shewhart chart for means. Refer to Wadsworth and others (1986). If  $r \leq 0.05$ ,  $k \geq 3$ , and  $\delta < 0.10$ , the algorithm used is unstable. However, note that the EWMA behaves like a cusum when  $r \rightarrow 0$ , and in this case the CUSUMARL function is applicable.*

HUNTER, J. S. (1986) *The exponentially weighted moving average*, JQT **18**, 203-210.

*Thus, as  $\lambda \rightarrow 0$ , the EWMA takes on the appearance of the CUSUM. The EWMA control chart for values of  $0 < \lambda < 1$  stands between the Shewhart and CUSUM control charts in its use of the historical data.*

p. 207

## EWMA gleicht CUSUM für kleine $\lambda$ ?

**JA**

**NEIN**

CROWDER, S. V. (1987)

WOODALL, W. H. & MARAGAH, H. D. (1990)

MITTAG, H. J. (1993)

RINNE, H. & MITTAG, H. J. (1995)

**$\approx$  NEIN**

GOHOUT, W. (1996)

CROWDER, S. V. (1989)

LEDOLTER, J. (1999)

HUNTER, J. S. (1990)

STEMANN, D. (1997)

SAS (2000)

**keine Aussage**

STEMANN, D. & WEIHS, C. (2001)

viele andere

## Hunter (1990)

HUNTER, J. S. (1990) *Discussion of Lucas & Saccucci*, *Technometrics*, **32**, p. 21-22.

*Each observation in the CUSUM then takes weight  $1/n_i$ , where  $i$  is the index number of the trial. Of course,  $n_i$  varies randomly from trial to trial.*

...  $E(n_i) = ASN$  und  $\sqrt{Var(n_i)} = SD(SN)$  und

$$\mathcal{L}_\mu(z) = ASN_\mu(z) + OC_\mu(z) \frac{ASN_\mu(0)}{1-OC_\mu(0)}$$

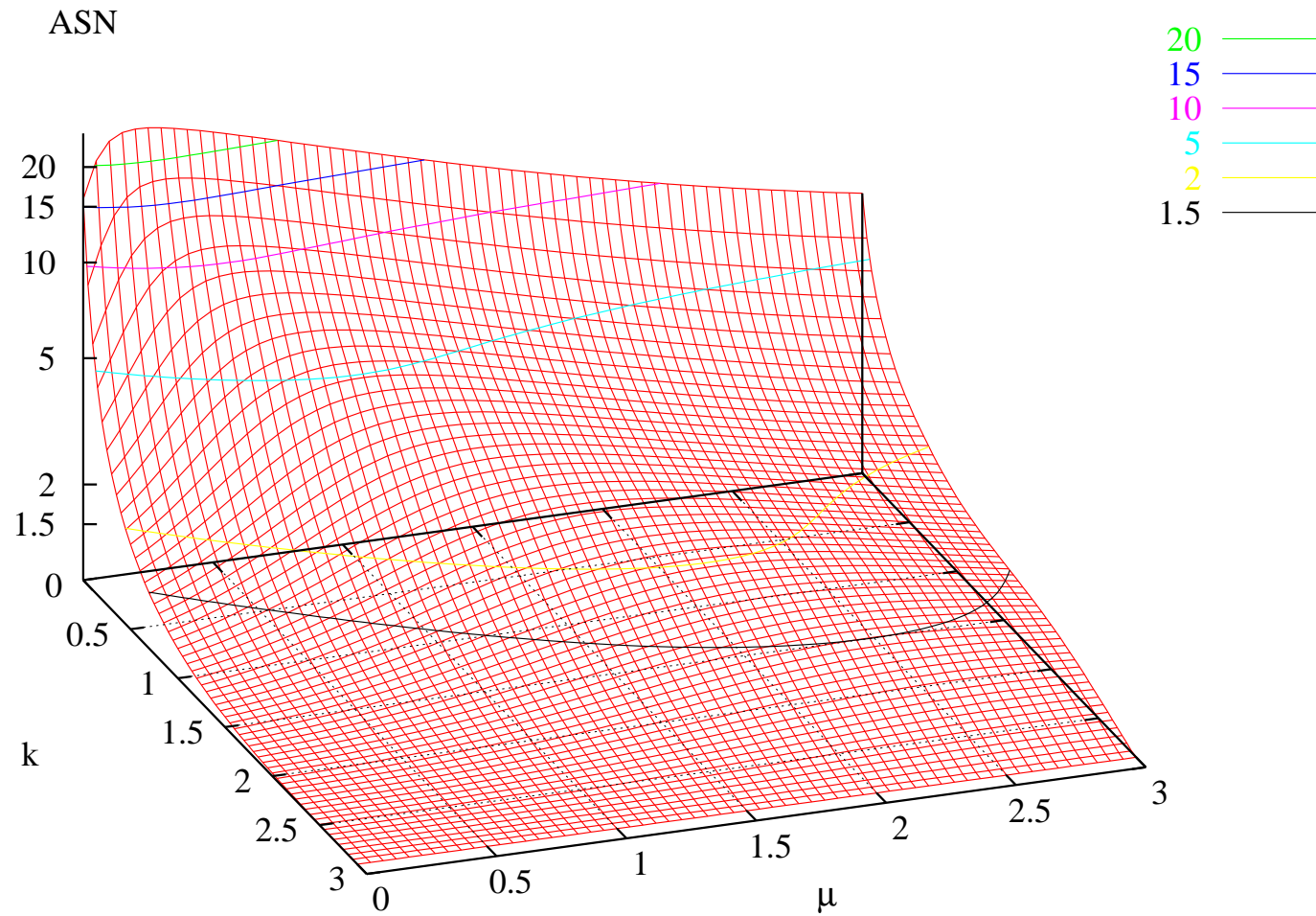
**Beispiel:** einseitiges CUSUM-Verfahren mit  $E_\infty(L) = 500$

↪ "natürlichen" Wertebereich d. Referenzwertes  $k - \left[ 0, 2.8782 = \frac{1}{1-\Phi^{-1}(1/500)} \right]$



## Mittlerer Umfang der CUSUM-Zyklen (1seitiges Schema)

$$E_{\infty}(L) = 500$$



## Standardabweichung der CUSUM-Zyklen (1seitiges Schema)

$$E_{\infty}(L) = 500$$

